Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)
Ein großer Denker und Wegbereiter der Mathematik

Klaus Ronellenfitsch

In: MONOID, Heft 48 (Dezember 1996)

Es war ein Vorschlag von Herrn Martin Mettler, dem Herausgeber dieser Zeitschrift, das vorliegende Sonderheft unter dem Thema „Das mathematische Wirken von Gottfried Wilhelm Leibniz" zu gestalten. Er rief mich Ende August dieses Jahres an und meinte, da unser Leibniz-Gymnasium in Östringen ja den Namen dieses großen Philosophen und Mathematikers trage, und da unsere Mathe-AG regelmäßig Lösungen zu den in MONOID gestellten „Neuen Aufgaben" wie auch Beiträge zu „Wer forscht mit?" schickt, sollten doch die Teilnehmer unserer Mathe-AG verschiedene Artikel über Leibniz schreiben. Seit neun Jahren leite ich diese Mathe-AG, mit wechselnder Schülerbesetzung, zuletzt mit Schülern aus den Klassenstufen 10/11.

Gerne sagte ich Herrn Mettler zu, denn ich betrachtete dies als eine Gelegenheit, zusammen mit meinen AG-Teilnehmern eine außergewöhnliche und aus dem üblichen Rahmen fallende Aufgabe zu bewältigen, und außerdem erinnerte ich mich („mal kurz nachrechnen: 1996 – 1646 = 350"), daß wir ja dieses Jahr den 350. Geburtstag von Leibniz feiern, ihm also schon etwas Besonderes zu leisten schuldig sind!

Freilich war ich mir aber auch der Schwierigkeiten bewußt, dieses Vorhaben zu realisieren. Zum einen drängte uns die Zeit (uns blieben nur wenige Wochen zum Recherchieren), zum anderen wechselten drei AG-Teilnehmer zwischenzeitlich in andere Gymnasien, und schließlich sind die von Leibniz behandelten mathematischen Themen für Schüler der Klassenstufen 10/11 zum Teil schwer zu erfassen und darzustellen. So habe ich in Zusammenarbeit mit meinen AG-Teilnehmern zunächst einmal alles gesammelt und geordnet, was wir über „unseren" Leibniz in der uns zugänglichen Literatur finden konnten. Wir fertigten eine Literaturliste an und stellten eine Übersicht über die verschiedenen Themen wie Infinitesimalrechnung, Dualsystem, Rechenmaschinen, alternierende Reihen usw. auf, mit denen sich Leibniz beschäftigt hatte. Letztendlich übernahm ich selbst als AG-Leiter die Auswertung und artikelmäßige Zusammenfassung des gesammelten Materials.

Die folgenden Artikel über Leibniz sind also in ziemlich kurzer Zeit entstanden und erheben keinen Anspruch darauf, das vollständige mathematische Wirken von Leibniz zu erfassen und wissenschaftlich einwandfrei darzustellen. Dazu hatten wir auch nur eine begrenzte Literaturauswahl, die zudem nur aus Sekundärliteratur bestand. Verständlicherweise konnten wir keine der (bisher nur zum Teil) edierten Manuskripte und Briefe von Leibniz auswerten, die ja zudem meist lateinisch oder französisch geschrieben sind, ganz zu schweigen von den vielen noch unedierten Handschriften. Wir mußten also auf Zusammenfassungen und Darstellungen von Fachleuten zurückgreifen, die sich mit Leibniz beschäftigt hatten.

Wir hoffen, daß es uns in den folgenden abgeschlossenen Artikeln gelungen ist, eine Idee davon zu geben, was wir Leibniz auf mathematischem Gebiet zu verdanken haben. Da seine schriftliche Hinterlassenschaft in Form von Briefen und Manuskripten bei weitem noch nicht vollständig ausgewertet ist, können wir in Zukunft sicher noch mit einigen „Entdeckungen" rechnen! Beim Zusammenstellen der folgenden Artikel haben wir selbst vieles über Leibniz und über die Mathematik dazugelernt, und wir denken, daß auch die Leser der Artikel manches Neue und Interessante finden werden.

Gottfried Wilhelm Leibniz, sein Leben und sein Werk

Gottfried Wilhelm Leibniz wurde am 1. Juli (bzw. am 21. Juni alter Zeitrechnung) 1646 in Leipzig als Sohn eines Juraprofessors und einer Professorentochter geboren. Seine Eltern starben sehr früh, 1652 der Vater, 1664 die Mutter. In der Bibliothek seiner Eltern fand Leibniz genügend Stoff für seinen Wissenshunger, und schon als Achtjähriger brachte er sich ohne fremde Anleitung, nur mit Hilfe von illustrierten Büchern, die lateinische Sprache bei, die er wenige Jahre später, ebenso wie die griechische, hervorragend beherrschte.

Mit 15 Jahren besuchte Leibniz die Universität seiner Heimatstadt, veröffentlichte mit 16 seine erste philosophische Schrift, legte mit 17 die erste philosophische Prüfung ab und wurde mit 18 Magister. Neben seinem Studium der Philosophie und Rechtswissenschaft in Leipzig (zwischendurch auch in Jena und in Altdorf bei Nürnberg) beschäftigte sich Leibniz intensiv mit Mathematik, Logik und Physik (z.B. Diskussion mit Otto v. Guericke), aber auch zeitlebens mit der Alchemie. In Leipzig wegen seines geringen Alters (er war kaum 20 Jahre alt) nicht zum Doktorat zugelassen, promovierte Leibniz 1666 in Altdorf zum Doktor beider Rechte, verzichtete aber danach auf eine akademische Karriere, da ihm die Entfaltung und praktische Anwendung seiner Fähigkeiten in den verkrusteten Strukturen einer Universität kaum möglich schienen.

In Nürnberg machte Leibniz 1667 die Bekanntschaft mit dem ehemals kurmainzischen Minister Johann Christian Freiherr v. Boineburg, der ihm eine Anstellung als Hofrat, d.h. als diplomatischer Berater bei dem Mainzer Kurfürsten Johann Philipp von Schönborn vermittelte. In ursprünglich politischer Mission 1672 nach Paris gesandt (er sollte versuchen, Ludwig XIV. zum Angriff auf Ägypten zu bewegen, um Frankreichs Machtinteressen von Deutschland abzulenken), nutzte Leibniz seinen vierjährigen Aufenthalt in der europäischen Metropole, in der er mit führenden Gelehrten seiner Zeit zusammentraf, um sich vor allem auf mathematischem Gebiet weiterzubilden. Sein Lehrer und besonderer Förderer war der in Paris lebende holländische Physiker, Astronom und Mathematiker Christiaan Huygens.

Anläßlich einer Reise nach London im Jahre 1673 wurde Leibniz, der bereits 1669 auswärtiges Mitglied der Pariser „Académie des Sciences“ geworden war, auf Empfehlung des Generalsekretärs H. Oldenburg - trotz Bedenken von Mathematikern wie Pell oder Newton - als Mitglied in die Royal Society, d.h. in die Londoner Akademie aufgenommen. In London machte Leibniz auch die Bekanntschaft mit dem Chemiker R. Boyle und dem Physiker R. Hooke. Erst nach seiner Rückkehr nach Paris machte sich Leibniz daran, durch ein intensives autodidaktisches Studium der ihm von Huygens empfohlenen Werke von Cavalieri, Descartes, Pascal, Wallis, Gregory und anderen sein mathematisches Wissen zu vervollkommnen. Den Höhepunkt dieser Bemühungen bildete seine Erfindung der Infinitesimalrechnung im Oktober 1675, die er aber aus Zeitgründen nicht sofort ausbauen und publizieren konnte.

Auf der Rückkehr von einer weiteren Londonreise im Jahre 1676 besuchte Leibniz A. van Leeuwenhoek und Spinoza in den Niederlanden. Nach dem Tod seines Gönners v. Boineburg und des Mainzer Kurfürsten v. Schönborn mußte Leibniz Paris, wo er sich vergeblich um eine Professur bemühte, aus finanzieller Not verlassen und trat als Hofrat und Bibliothekar 1676 in den Dienst des hannoverschen Herzogs Johann Friedrich, der leider für mathematische Beschäftigungen wenig Verständnis hatte. Erst als 1682 in Leipzig eine wissenschaftliche Zeitschrift, die „Acta eruditorum“, gegründet wurde, hatte Leibniz als ständiger Mitarbeiter Gelegenheit, seine mathematischen und naturwissenschaftlichen Forschungsergebnisse zu veröffentlichen, was er gerne und regelmäßig tat. Weniger gern und nur der Pflicht halber erfüllte Leibniz seit 1685 den Auftrag des Herzogs von Hannover, die Geschichte des Herrschergeschlechtes der Welfen zu schreiben, doch tat er auch dies durch Zurückgehen auf die Quellen (1707-11 Herausgabe der vielbeachteten Quellensammlung „Scriptores rerum Brunsvicensium") mit einer solchen Gründlichkeit, daß man ihn als Stammvater der wissenschaftlichen Geschichtsschreibung (Historiographie) bezeichnen kann. Mehrere Reisen, u.a. 1687-90 über Wien nach Italien, führten Leibniz im Zusammenhang mit diesem Auftrag durch Europa. So kam er auch nach Rom, wo ihm die Betreuung der berühmten Vatikanischen Bibliotheken angeboten wurde, was Leibniz jedoch als Nichtkatholik ablehnte, da er zudem an der wissenschaftlichen Liberalität der katholischen Kirche zweifelte. 1691 übernahm Leibniz dafür die Leitung der Wolfenbütteler Bibliothek.

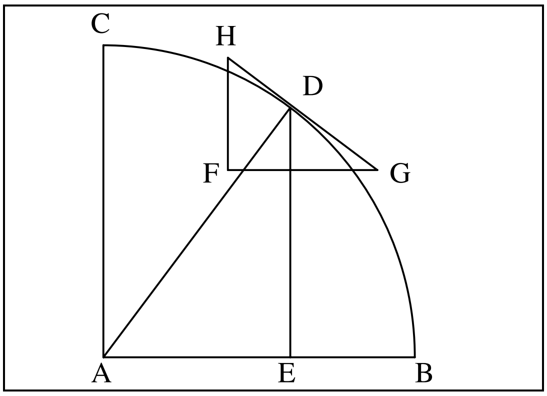
Freundschaftlich unterstützt von der hannoverschen Prinzessin Sophie Charlotte, der späteren Königin von Preußen, arbeitete Leibniz am Ausbau und an der Systematisierung seiner neuartigen philosophischen Vorstellungen, widmete aber auch einen Großteil seiner Zeit und Kraft der Organisation der Wissenschaften. So wurde auf sein Betreiben hin und durch Vermittlung von Sophie Charlotte im Jahre 1700 die Berliner „Societät der Wissenschaften" gegründet, deren Präsident Leibniz wurde. Zur Errichtung weiterer geplanter Akademien in Dresden und Wien kam es nicht mehr, nicht zuletzt durch den Widerstand der Jesuiten. Die Jahre 1712-14 verbrachte Leibniz in Wien, wo er 1713 zum Reichshofrat ernannt wurde. 1714 kehrte er wieder nach Hannover zurück, wo er seinem letzten Souverän Georg Ludwig von Hannover im gleichen Jahr die englische Königskrone verschaffte.

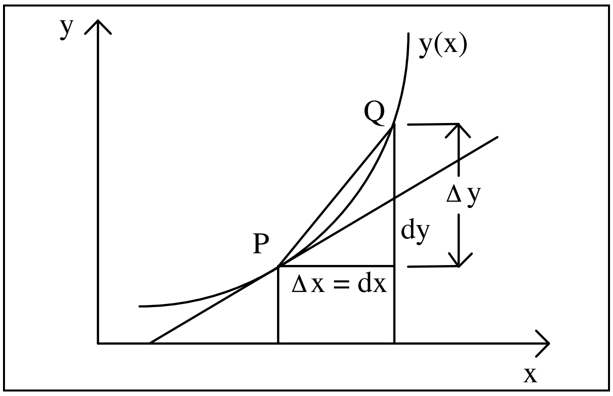
Leibniz beteiligte sich an Verhandlungen zur Versöhnung und Wiedervereinigung der reformierten christlichen Kirchen Deutschlands mit der katholischen Kirche, suchte aber auch im Bereich der natürlichen Theologie nach Übereinstimmungen zwischen der chinesischen und der europäischen Philosophie. Seit 1711 war Leibniz wissenschaftlicher Berater des russischen Zaren Peter I., der ihn zum Russischen Geheimen Justizrat ernannte. Leibniz plante die Errichtung einer Akademie in St. Petersburg, erlebte aber nicht mehr die Ausführung dieses Vorhabens im Jahre 1724. Leibniz starb in Hannover am 14. November 1716, in seinem 70. Lebensjahr, zuletzt vereinsamt und von einer langjährigen Krankheit gezeichnet. An seinem Begräbnis am 14. Dezember 1716 nahm niemand aus den Reihen der Hofgesellschaft und der Beamtenschaft teil.

Angesichts seiner intensiven praktischen Tätigkeit als Staatsmann hatte Leibniz kaum die Zeit, größere wissenschaftliche Werke zu schreiben. Vor allem seine aufwendigen Forschungen zur Welfengeschichte nahmen ihn jahrelang in Anspruch. Nur auf dem Gebiet der Philosophie existieren drei in sich geschlossene Werke: *Neue Versuche über den menschlichen Verstand* (1703), die *Theodizee* (1710) und die *Monadologie* (1714). Dennoch hat Leibniz ein umfangreiches Gesamtwerk in Form von Zeitschriftenaufsätzen und Briefen an Zeitgenossen (es waren mehr als 1100 Briefpartner aus 16 Ländern) hinterlassen, denen er seine Gedanken mitteilte. Seit 1923 bemüht sich die Berliner Akademie der Wissenschaften in Zusammenarbeit mit dem Leibniz-Archiv der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover und der Leibniz-Forschungsstelle der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster um eine vollständige Erfassung und Edition sämtlicher Schriften und Briefe von Leibniz. Diese Gesamtausgabe, die jedoch noch lange nicht vollständig vorliegt, soll nach ihrer Fertigstellung etwa 80 Bände umfassen. R. Finster und G. v.d.Heuvel meinen dazu in ihrer Leibniz-Biographie: „Bis der gesamte Nachlaß erschlossen ist, werden noch, das kann man mit Sicherheit sagen, etliche Jahrzehnte vergehen. Aber auch dann wird es kaum einem einzelnen möglich sein, das zu erfassen und zu durchdringen, was Leibniz´ Werk verkörpert: die Universalität des Wissens seiner Zeit."

Leibniz als Mitbegründer der Infinitesimalrechnung

Wenn von Leibniz’ Leistungen für die Mathematik die Rede ist, denkt man in erster Linie an seine Begründung der Infinitesimalrechnung. Während seines Pariser Aufenthaltes 1672 - 1676 studierte Leibniz auf Anregung des Mathematikers **Christiaan Huygens** (1629-1695) die Schriften von **Pascal**, **Descartes**, **Wallis**, **Gregory**, **Cavalieri** und anderer führender Mathematiker seiner Zeit. In einer Abhandlung von Pascal über die Sinuswerte im Kreisquadranten fand Leibniz 1673 eine Figur, bei deren Anblick ihm im Hinblick auf das bisher ungelöste allgemeine Tangentenproblem „das große Licht“ aufging (siehe linkes Bild).





Im Kreisquadranten ABC steht die Tangente GH auf dem Radius $\overline{AD}$ senkrecht, und die Dreiecke AED sowie das für die Tangente „charakteristische Dreieck“ HFG sind zueinander ähnlich. Setzt man $\overline{AE} = x$, $\overline{DE} = y$, $\overline{HF} = dx$ und $\overline{FG} = dy$, so ist also $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$.

Leibniz erkannte in dem „charakteristischen Dreieck“ die Brücke zur Lösung des Problems, für beliebige glatte Kurven die Tangente zu bestimmen. 1674 entdeckte Leibniz, daß sich aus der Umkehrung des Tangentenproblems die Quadratur der Kurve (Berechnung der von der Kurve begrenzten Fläche) ergibt. Mit anderen Worten: Er entdeckte die Integration als Umkehrung der Differentiation. Ende Oktober 1675 schließlich gelang ihm der entscheidende Durchbruch, indem er die zur Behandlung des Tangenten- und Quadraturproblems idealen Formalisierungen fand.

Am 29. Oktober 1675 notierte Leibniz: „Es wird nützlich sein, statt der Gesamtheiten des Cavalieri: also statt ‚Summe aller y‘ von nun an $\int y\,dy$ zu schreiben.“ Und weiter: „Wie nämlich das Zeichen $\int$ die Dimension vermehrt, so vermindert sie das d. Das Zeichen $\int$ aber bedeutet eine Summe, d. eine Differenz.“ Leibniz verwandte hier erstmals die noch heute üblichen Integral- und Differentialbezeichnungen!

Leider hatte Leibniz in der Folgezeit keine Gelegenheit, seine Ideen und Ergebnisse auszubauen und zusammenfassend darzustellen, so daß seine Pläne und Vorstudien zu einer „Scientia infiniti“ (Wissenschaft des Unendlichen) mehrere Jahre lang liegenblieben. Erst als 1682 in Leipzig eine wissenschaftliche Zeitschrift gegründet wurde, die „Acta eruditorum“ (Berichte der Gelehrten), veröffentlichte Leibniz nacheinander seine Ergebnisse, unter anderem 1684 die erste Abhandlung zur Differentialrechnung, deren langer Titel „Nova methodus ...“ zu deutsch lautet: „Eine neue Methode für Maxima und Minima sowie für Tangenten (...) und eine beispiellose Art der Rechnung dafür.“

Wie sah nun die Leibniz’sche Begründung der Differentialrechnung aus?

Als „Anstieg der Tangente“ in einem Punkt P einer beliebigen glatten Kurve (siehe vorhergehende Seite, rechtes Bild) definierte Leibniz den „Differentialquotienten“ $\frac{dy}{dx}$, der sich (in heutiger Schreibweise) als $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, d.h. als Grenzwert einer Folge von „Differenzenquotienten“ ergibt, indem ein zu P benachbarter Punkt Q längs der Kurve gegen P strebt.

Leibniz, der sich vorstellte, daß die „Differentiale“ dx und dy im Grenzfall „unendlich klein“ werden, hatte freilich noch nicht die exakte Ausdrucksweise des 19. Jahrhunderts und unterschied nicht zwischen den Bezeichnungen dy und Δy. Ungeachtet dessen fand Leibniz mit seiner Methode eine Fülle neuer Rechenregeln und Sätze:
Die Regeln des Differenzierens für Summe, Differenz, Produkt und Quotient (z.B. die Produktregel in der Form $d(xy) = x\,dy + y\,dx$), die Potenz- und Kettenregel, das Verfahren der Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten mit der ersten und zweiten Ableitung, die Differentiation auch komplizierter irrationaler Funktionen, die Lösung einer Differentialgleichung durch Trennung der Variablen u.v.m.

Zwei Jahre nach der Grundlegung der Differentialrechnung, 1686, gab Leibniz in der Abhandlung „De geometria recondita ...“ (Die verborgene Geometrie) die Grundregeln der Integralrechnung an, wobei er die Bezeichnung „methodus tangentium inversa“ oder „calculus summatoris“ (umgekehrte Tangentenmethode oder Summationsrechnung) verwandte. 1693 entwickelte Leibniz Methoden zur gliedweisen Integration unendlicher Reihen, 1694 folgte eine Abhandlung über das unbestimmte Integrieren. Weitere Schriften behandelten u.a. die Integration rationaler Funktionen oder die Theorie der Berührung von Kurven.

Die Leibniz´sche Begründung der Differential- und Integralrechnung wäre zu schön gewesen, hätten ihr nicht zwei „Schatten“ angehaftet. Zum einen war dies die Tatsache, daß die von Leibniz veröffentlichten Resultate nicht leicht lesbar waren und zudem auch etliche Druckfehler enthielten, so daß sie zunächst auf Ablehnung und Unverständnis stießen (von seinen Zeitgenossen soll sie nur der Schweizer Mathematiker **Jacob Bernoulli** mit einiger Mühe verstanden haben). Zum anderen war Leibniz nicht der einzige gewesen, der die Differentialrechnung erfunden hatte, denn etwa zur gleichen Zeit war dies auch dem englischen Physiker und Mathematiker **Isaac Newton** (1642-1727) gelungen.

Newton, dem die Mathematik in erster Linie eine Hilfswissenschaft der Physik war, ist nicht durch geometrische Fragestellungen wie Leibniz, sondern durch physikalische Überlegungen auf die Infinitesimalrechnung gestoßen. Er erfand seine Lehre von den „Fluxionen“, um Geschwindigkeitsprobleme lösen zu können, und ähnlich wie Leibniz machte auch er sich Gedanken über das „unendlich Kleine“. Als Newton von Leibniz´ Entdeckungen hörte, beanspruchte er, die Differentialrechnung als erster erfunden zu haben und bezichtigte Leibniz des Plagiats, was dieser energisch bestritt. In der Folgezeit entwickelte sich darüber ein langjähriger Prioritätsstreit, der selbst über Leibniz´ Tod hinaus fortdauerte.

Heute weiß man, daß Newton seine Begründung der Infinitesimalrechnung früher als Leibniz gefunden hat (schon um 1670), aber ebenso bekannt ist auch, daß Leibniz seine Entdeckungen unabhängig von Newton gemacht hat. Außerdem veröffentlichte Leibniz seine Ergebnisse schon 1684, Newton aber erst 1704. Als 1938 der Nachlaß des früh verstorbenen schottischen Mathematikers **James Gregory** (1638-1675) publiziert wurde, stellte man fest, daß dieser durch seine ab 1668 durchgeführten Untersuchungen als dritter unabhängiger Begründer der Infinitesimalrechnung zu gelten hat!

Die Leibnizsche Reihe und die Kreiszahl π

Um das Jahr 1670 beschäftigte sich der schottische Mathematiker **James Gregory** (1638-1675) mit Interpolationsreihen. Auf diesem Wege gelang ihm die Entwicklung von Funktionen in **Potenzreihen**, ein Gedankengang, der heute üblicherweise dem englischen Mathematiker **Brook Taylor** (1685-1731) zugeschrieben wird.

Unter anderem fand Gregory die Potenzreihe für die trigonometrische Funktion $\arctan x$, d.h. für die Umkehrfunktion von tan x:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$$

Unabhängig von Gregory entdeckte danach auch Leibniz diese Reihe, allerdings war nur er es, der die Idee hatte, in dieser Reihe $x = 1$ zu setzen und damit ein besonders bemerkenswertes Resultat zu erzielen. Leibniz überlegte: $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, also ist $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Auf diese Weise fand Leibniz die nach ihm benannte „**Leibnizsche Reihe“** für $\frac{\pi}{4}$, nämlich:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \ldots$$

Hocherfreut über diese Entdeckung fügte Leibniz dem Ergebnis die Worte hinzu: *„numero deus impari gaudet!“*, d.h. „Gott freut sich der ungeraden Zahlen!“. In einem Vortrag des deutschen Mathematikers **Ernst Eduard Kummer** (1810-1893) in der Preußischen Akademie in Berlin 1867 bemerkt dieser hierzu: „Wir erkennen in dieser Äußerung zunächst, daß Leibniz selbst die neue unendliche Reihe in ihrer einfachen und dabei unendlich mannigfaltigen Form in Staunen und Verwunderung angeschaut hat, und daß dieselbe auf ihn in ähnlicher Weise gewirkt hat wie der Anblick des Meeres in seiner Unbegrenztheit ... Daß aber Leibniz ausruft ‚Gott freut sich über die ungeraden Zahlen’, hat noch einen tieferen Sinn, denn es spricht sich hierin das Bewußtsein darüber aus, daß das Reich des Mathematischen mit seinem ganzen unendlich mannigfaltigen Inhalte nicht menschliches Machwerk ist, sondern ebenso als Gottes Schöpfung uns objectiv entgegentritt wie die äußere Natur.“

In einer Leserumfrage der Zeitschrift „The Mathematical Intelligencer“ wurden 1990 die zehn „schönsten“ mathematischen Sätze ermittelt, wobei ihre Bedeutung oder praktische Anwendbarkeit zweitrangig waren. Unter diesen „Top Ten“ war zwar nicht die Leibnizsche Reihe zu finden, aber in der Rangliste auf Platz fünf eine sehr ähnliche Reihe, die der Schweizer Mathematiker **Leonhard Euler** (1707-1783) fand:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Diese Reihe enthält nicht nur die ungeraden, sondern **alle** natürlichen Zahlen, wobei man freilich geteilter Meinung darüber sein kann, ob die Leibnizsche Reihe nicht ebenso „schön“ ist.

Computer-Berechnungen von π mit der Leibnizschen Reihe

Für die praktische Berechnung von $\pi = 3{,}1415926535\ldots$ ist die Leibnizsche Reihe weniger geeignet, da sie nur sehr langsam konvergiert. So erhält man nach 1000 Schritten erst den Näherungswert 3,14059... mit **zwei** exakten Dezimalen (siehe untenstehendes Programm 1). Durch geschicktes Umformen der Leibnizschen Reihe kann man die Konvergenz allerdings beschleunigen:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \ldots = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{2}{9\cdot 11} + \ldots$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \ldots = 1 - \frac{2}{3\cdot 5} - \frac{2}{7\cdot 9} - \frac{2}{11\cdot 13} - \ldots$$

Bildet man den Mittelwert von (1) und (2), so erhält man:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 11\cdot 13} + \frac{4}{13\cdot 15\cdot 17} + \ldots$$

Bei dieser umgeformten Reihe (3) erhält man nach 1000 Schritten den deutlich besseren Näherungswert 3,1415925... mit bereits **sechs** exakten Dezimalen (siehe Programm 2). Heutzutage gibt es freilich noch wesentlich schnellere und effizientere Berechnungsmethoden für die Kreiszahl π, z.B. mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\pi}{4} = 8 \arctan \frac{1}{10} - 4 \arctan \frac{1}{515} - \arctan \frac{1}{239}$$

unter Verwendung der bereits genannten Potenzreihe für $\arctan x$.

Zwei Computerprogramme in QBasic zur Berechnung der Kreiszahl π:

```
Zaehler = 1
FOR n = 1 TO 1000
Summand = Zaehler / (2 * n - 1)
Wert = Wert + Summand
Zaehler = -Zaehler
NEXT n
PRINT 4 * Wert
```

Programm 1

```
Wert = 1 / 2
FOR n = 1 TO 999
z = 4 * n - 3
Nenner = z * (z + 2) * (z + 4)
Summand = 4 / Nenner
Wert = Wert + Summand
NEXT n
PRINT 4 * Wert
```

Programm 2

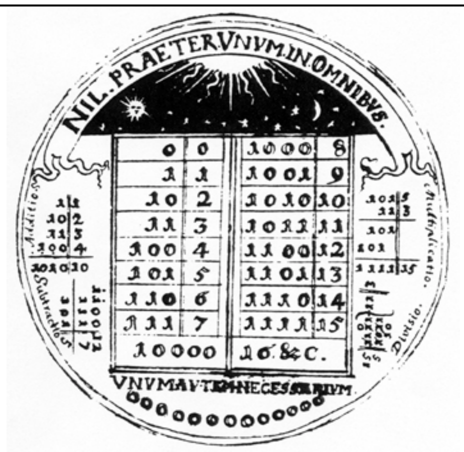
Bemerkung:
Die gewünschte (doppelte) Genauigkeit der Dezimaldarstellungen erhält man in der Programmiersprache QBasic allerdings erst, wenn man vor das Programm als einleitende Zeile DEFDBL a - z setzt.

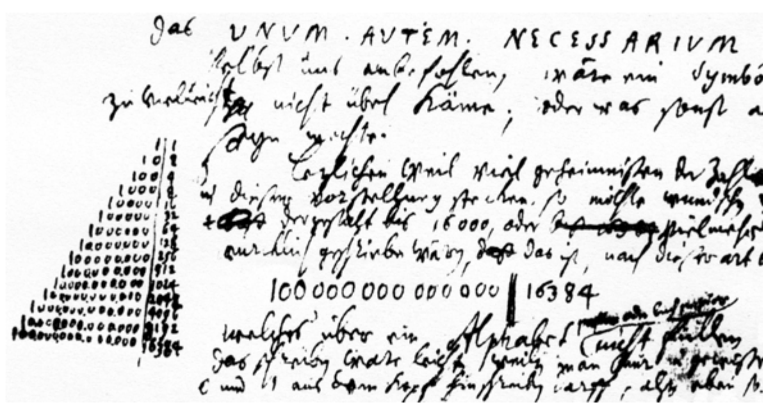
Leibniz und das Dualsystem

Der Name Leibniz wird in der Mathematik vor allem mit zwei Leistungen unmittelbar in Zusammenhang gebracht. Neben seiner von Newton unabhängigen Entdeckung der Infinitesimalrechnung ist dies seine Erfindung des dualen (auch dyadischen oder binären) Zahlensystems, das heute jeder Schüler kennt. Im Unterschied zum normal gebräuchlichen Zehnersystem mit den zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 und den Stufenzahlen 1, 10, 100, 1000, ... (den Zehnerpotenzen) kann man im Leibnizschen Dualsystem jede natürliche Zahl unter Verwendung von nur zwei Ziffern **0** und **1** und mit den Zweierpotenzen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 ... als Stufenzahlen darstellen, z.B.

$$88 = 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 1\cdot 8 + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = \mathbf{1011010}$$

Schon 1679 verfaßte Leibniz eine „dyadische Arithmetik" und bemerkte: „Das Addieren von Zahlen ist bei dieser Methode so leicht, daß diese nicht schneller diktiert als addiert werden können." In einem Neujahrschreiben vom 12. Januar 1697 an den Herzog Rudolf August von Wolfenbüttel ging Leibniz anläßlich eines Vorschlages zu einem Medaillenentwurf auch auf sein Dualsystem ein und listete eine Tabelle der ersten 15 Stufenzahlen 1, 2, 4, ..., 16384 auf, die ja bekanntlich im Dualsystem **1**, **10**, **100**, ..., **100000000000000** heißen.



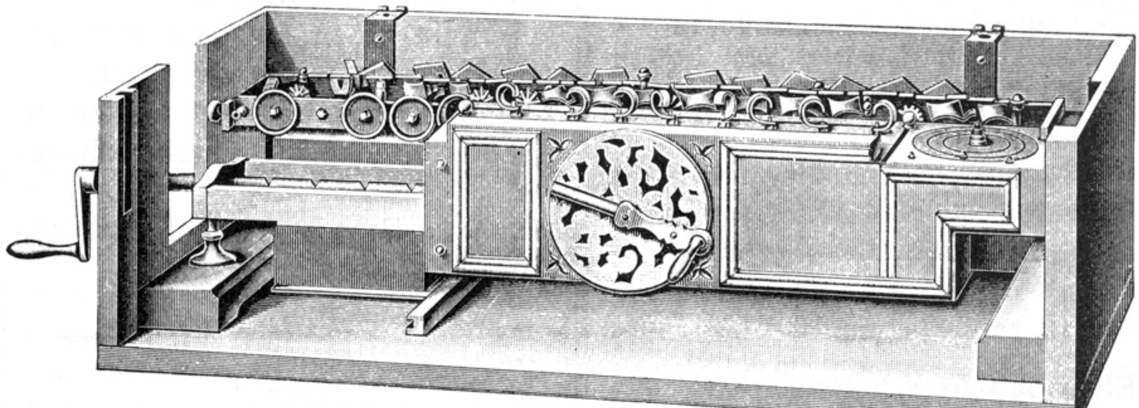


Für Leibniz, der sowohl praktischer Mathematiker als auch Metaphysiker war, war das Dualsystem, anders als das Zehnersystem, ein Symbol der Schöpfung und der Vollkommenheit der Welt, „weil die leere Tiefe und Finsternis zu **Null** und Nichts, aber der Geist Gottes mit seinem Lichte zum Allmächtigen **Eins** gehört". Da die Erde nach der Bibel in 7 Tagen geschaffen wurde, war für Leibniz der 7. Tag der vollkommenste Tag, was sich für ihn auch dadurch ausdrückte, daß die Zahl 7 im Dualsystem als **111**, d.h. ohne Null geschrieben wird und zudem noch einen Bezug zur göttlichen Dreifaltigkeit (dreimal die 1) hat. Leibniz sah in der Dyadik ein so überzeugendes Sinnbild des christlichen Glaubens, daß er sie sogar als Mittel der Heidenbekehrung einsetzen wollte und vorschlug, sie zu diesem Zwecke dem chinesischen Kaiser vorzulegen!

Neben diesem teilweise recht bizarren Zahlenmystizismus findet sich in Leibniz' Schriften freilich auch eine ausführliche mathematische Darstellung seiner „binären Arithmetik", in der er beschrieb, wie man solche Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren konnte. Mit seinem Dualsystem hat Leibniz die geistige Grundlage für das Funktionieren der heutigen Computer geschaffen, denn allein mit den Schalterzuständen **1** (Schalter ein) und **0** (Schalter aus) lassen sich alle Arbeiten heutiger Computer realisieren.

Leibniz und seine Rechenmaschine

Die Vorläufer unserer heutigen Computer waren mechanische Rechenmaschinen, deren erste das Universalgenie **Wilhelm Schickard** (1592-1635), Professor für biblische Sprachen in Tübingen, im Jahre 1623 erfunden hat. Die von ihm so genannte "Rechenuhr" funktionierte mit Hilfe von Zahnradgetrieben und konnte schon alle vier Grundrechenarten durchführen. Im Jahre 1642 erfand der erst 19jährige **Blaise Pascal** (1623-1662) eine Addiermaschine, um seinem Vater in seinem Beruf als Steuerbeamter das tägliche Rechnen zu erleichtern. Erheblich vollkommener war allerdings die von Leibniz 1673 während seines Pariser Aufenthaltes entwickelte Rechenmaschine (siehe Abbildung), die auch die Multiplikation und Division beherrschte (Vierspeziesrechen-maschine) und damit erhebliche Vorteile bot.



Die Multiplikation bzw. Division erreichte Leibniz durch fortgesetzte und gezählte Addition bzw. Subtraktion. Ein erstes Modell seiner Rechenmaschine stellte Leibniz 1673 in London aus. Es bestand aus einem festen, zwölfstelligen Resultatwerk und einem beweglichen, achtstelligen Einstellwerk. Zur Zahleneingabe ließen sich die beiden Werke mit einer Kurbel gegeneinander verschieben. Die Zifferneinstellung arbeitete mit der ebenfalls von Leibniz erfundenen Staffelwalze, die beim Verdrehen der Einstellräder über Zahnräder und Zahnstangen verschoben wurde. Ein noch erhaltenes Exemplar der Leibnizschen Rechenmaschine wird heute in der Landesbibliothek Hannover aufbewahrt.

Da solche mechanischen Rechenmaschinen mit vielen ineinandergreifenden Zahnrädern und Zifferntrommeln funktionierten, zeigten sie trotz äußerster Präzision in der Feinmechanik doch eine hohe Fehlerquote. Auch Leibniz hatte mit diesen technischen Widrigkeiten zu kämpfen und investierte bis zu seinem Lebensende ein Vermögen in seine Maschine, bei der vor allem der Zehnerübertrag nicht richtig funktionierte. Erst mit der Erfindung der Elektrizität bzw. Elektronik und der Ersetzung der mechanischen Teile durch Relais (elektromagnetische Schalter), Röhren, Transistoren und schließlich durch integrierte Schaltkreise und Chips konnten diese unvermeidbaren Ungenauigkeiten beseitigt werden.

Es ist bezeichnend für die richtungsweisenden Ideen von Leibniz, daß er schon um 1680 daran dachte, eine Rechenmaschine auf der Grundlage des von ihm erfundenen Dualsystems zu konstruieren. Aber erst in unserem Jahrhundert wurde dies mit Hilfe der Elektronik unter Verwendung von Relais möglich. In den Jahren ab 1934 entwickelte der deutsche Ingenieur **Konrad Zuse** (* 1910) in Berlin die erste nur mit den Ziffern 0 und 1 arbeitende Rechenmaschine. 1941 wurde die „ZUSE 3“ fertiggestellt. Sie enthielt 2600 Relais, arbeitete einwandfrei und war der erste programmgesteuerte Rechenautomat der Welt.

Leibniz und die Zahlentheorie

In der Zahlentheorie haben wir Leibniz in erster Linie das von ihm entdeckte und ausführlich untersuchte „dyadische Zahlsystem“ (Dualsystem) zu verdanken. Weniger bekannt ist, daß Leibniz sich schon mit imaginären Zahlen beschäftigte sowie einen grundlegenden Satz über Primzahlen entdeckte.

Jeder Schüler kennt heute die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Um einiges schwieriger und daher nicht zum Schulstoff gehörend sind jedoch die „Cardanischen Formeln“ für kubische Gleichungen der Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Der italienische Arzt und Mathematiker **Geronimo Cardano** (1501-1576) löste sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution sowie einigen weiteren Umformungen. Mit einem Sonderfall, dem sogenannten „casus irreducibilis“, der auf dem Wege über imaginäre Zahlen gerade zu drei reellen Lösungen führt, wußte Cardano allerdings noch nichts anzufangen.

Seit dem Spätsommer 1674 befaßte sich Leibniz eingehender mit Fragen der Gleichungslehre und studierte dabei ein 1572 von dem Italiener **Rafael Bombelli** (ca. 1530-ca. 1590) verfaßtes Algebrabuch. Bombelli erweiterte darin die Cardanischen Formeln und erhielt erstmals reelle Lösungen als Summen imaginärer Zahlen. Leibniz wiederum verallgemeinerte die Resultate von Bombelli und fand dabei folgende merkwürdige Zahlengleichung:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

Huygens, dem dieses Resultat 1675 von Leibniz mitgeteilt wurde, war äußerst überrascht und konnte kaum glauben, daß die genannte Summe $\sqrt{6}$ ergeben solle.

Zur Überprüfung ihrer Richtigkeit setze man (in heutiger Schreibweise) $i^2 = -1$ bzw. $i = \sqrt{-1}$ (imaginäre Einheit), dann wird die linke Seite der Gleichung zu $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}}$. Quadriert ergibt das:

$1 + i\sqrt{3} + 2\sqrt{1+i\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-i\sqrt{3}} + 1 - i\sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{1-3i^2} = 2 + 2\sqrt{1+3} = 2 + 4 = 6$, und das ist auch das Quadrat der rechten Seite der Gleichung.

Mit der von ihm aufgestellten Gleichung, die bereits komplexe Zahlen verwendet, ist Leibniz erneut vielen Zeitgenossen vorausgeeilt. Erst **Carl Friedrich Gauß** (1777-1855), vielleicht der größte Mathematiker überhaupt, hat 1831 eine vollständige Arithmetik der komplexen Zahlen entwickelt und ihnen damit ihren bleibenden Platz in der Mathematik zugewiesen.

Eine der grundlegenden Aussagen der Zahlentheorie ist der „Satz von Wilson“, der eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angibt, daß eine Zahl eine Primzahl ist. Schon Leibniz hat in seinen Schriften auf diesen Satz hingewiesen, und etwa 100 Jahre danach hat ihn auch der englische Richter und Mathematiker Sir **John Wilson** nachentdeckt, d.h. wie Leibniz vermutete er ihn nur, ohne ihn begründen zu können. Dem französischen Mathematiker **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813) blieb es vorbehalten, im Jahre 1771 einen vollständigen Beweis des „Satzes von Wilson“ zu finden, der eigentlich richtiger „Satz von Leibniz“ heißen müßte.

Wie lautet nun dieser Satz, der selbst einigen Mathematiklehrern unbekannt sein dürfte?
Satz von Wilson: Die natürliche Zahl p teilt $(p-1)!+1$ genau dann, wenn p eine Primzahl ist.
Beispiele: Für $p = 5$ ist $(p-1)!+1 = 4!+1 = 25$, und 25 ist durch 5 teilbar (5 ist eine Primzahl). Für $p = 6$ ist $(p-1)!+1 = 5!+1 = 121$, und 121 ist **nicht** durch 6 teilbar (6 ist **keine** Primzahl).

Leibniz, die Kombinatorik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mit der mathematischen Disziplin „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ untrennbar verbunden ist das Gebiet der „Kombinatorik“, dessen Fragestellungen stets beginnen mit: „Wie viele Möglichkeiten gibt es für ...?“ Die Wörter „combinatio“ bzw. „conternatio“ bedeuteten bei den Römern eine Zusammenfassung von je zwei bzw. drei Dingen, und in diesem Sinne übernahm der erst zwanzigjährige, jedoch historisch-literarisch bereits äußerst gebildete Leibniz diese Bezeichnungen in seiner „Dissertatio de Arte Combinatoria“. In dieser 1666 erschienenen Schrift beschäftigte sich Leibniz, neben seinen Ideen zur „Erfindungskunst“, auch mit einigen Fragestellungen der mathematischen Kombinatorik, unter anderem mit der Anzahl der Permutationen von n Elementen, die ja bekanntlich n! („Fakultät“) beträgt.

Leibniz liebte es, zahlenmäßige Zusammenhänge in Form von Tabellen oder Tafeln darzustellen. Er benutzte sie, um durch induktive Schlüsse Gesetze und Regeln zu finden, die ihrerseits wiederum zur Anlegung weiterer Tabellen zwecks Einsparung künftiger Rechenarbeit benötigt wurden. So fügte Leibniz seiner oben erwähnten „Dissertatio“ auch eine von ihm berechnete Tabelle aller Fakultäten von $1! = 1$ bis $24! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 24 = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000$ ein, ohne allerdings die heutigen Bezeichnungen „Permutation“ bzw. „Fakultät“ zu verwenden.

Im Jahre 1676 veröffentlichte Leibniz folgende Tabelle:

1	6	5	1	1					
2	36	25	11	10	1				
3	216	125	91	75	15	1			
4	1296	625	671	500	150	20	1		
5	7776	3125	4651	3125	1250	250	25	1	
6	46656	15625	31031	18750	9375	2500	375	30	1

In dieser Tabelle, den n-maligen Wurf eines Würfels betreffend, ging es Leibniz um die Bestimmung der Anzahl von Variationen mit Wiederholung, die ein bestimmtes Element enthalten. Die einzelnen Spalten berechnen sich wie folgt:

$$n \qquad 6^n \qquad 5^n \qquad 6^n - 5^n \qquad \binom{n}{1}\cdot 5^{n-1} \qquad \binom{n}{2}\cdot 5^{n-2} \qquad \binom{n}{3}\cdot 5^{n-3} \qquad \ldots \qquad \binom{n}{6}\cdot 5^{n-6}$$

Wie man sieht, war Leibniz der Bernoulli-Formel der Binomialverteilung

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

irgendwie schon recht nahe. Mehr noch: Seine 1678 erschienene Abhandlung „De incerti aestimatione“ – „Über die Schätzung des Nicht-Sicheren“, die leider erst 1957 veröffentlicht wurde, enthält, sogar mit einer Formel, die erste **Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit**:
„Wenn mehrere Ereignisse gleich günstig sind, so ist die Schätzung der Erwartung (spei aestimatio) das Verhältnis der Anzahl der günstigen Ergebnisse zur Anzahl aller Ergebnisse (portio ... numerus eventuum qui favere possunt ad numerum omnium eventuum).“

Diese Definition wird heute allgemein dem französischen Mathematiker **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827) zugeschrieben, aber Laplace veröffentlichte sie erst im Jahre 1812, d.h. 134 Jahre nach Leibniz!

Leibniz und das harmonische Dreieck

Als Leibniz bei seinem ersten Besuch in Paris 1672 mit dem holländischen Physiker und Mathematiker **Christian Huygens** zusammentraf, stellte ihm dieser die Aufgabe, die Reihe

$$s = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

zu berechnen. Obwohl Leibniz durch kein mathematisches Studium vorgebildet war, gelang es ihm dennoch, dieses Problem auf eine elegante und einleuchtende Art zu lösen. Leibniz fand die Beziehung

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

und erreichte dadurch die Termumformung

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots = \frac{1}{1} + 0 + 0 + \ldots = 1$$

Da Leibniz stets versuchte, universelle, d.h. allgemeine und umfassende Ergebnisse und Wahrheiten zu finden, versuchte er anschließend, das bei diesem Beispiel entdeckte Verfahren durch Anwendung auf ein Zahlendreieck zu erweitern, das er „harmonisches Dreieck" nannte. Es ist in seinem Aufbau dem „Pascalschen Dreieck" verwandt (siehe nächste Seite), enthält aber statt natürlicher Zahlen nur Bruchzahlen:

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1}\\
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}\\
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4}\\
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5}\\
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}\\
\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}
\end{array}$$

Harmonisches Dreieck

Wie ist nun das „harmonische Dreieck" aufgebaut? Hier ist jede Zahl die Summe der beiden schräg darunterstehenden Zahlen, wobei die n-te Zeile (die Zählung mit 0 beginnend) mit $\frac{1}{n+1}$ beginnt (und endet).

Leibniz interessierte sich vor allem für die aus den Gliedern der Schrägzeilen des harmonischen Dreiecks gebildeten unendlichen Reihen. Ist S_n die n-te „Schrägreihe", d.h. die Summe der Glieder der n-ten Schrägzeile ($n = 1,2,3,\ldots$), so fand der junge Leibniz wie oben beschrieben $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots = 1$. Die 1. Schrägreihe ist also konvergent. Mehr noch: Leibniz konnte das von ihm gefundene Verfahren auf sämtliche andere Schrägreihen verallgemeinern und so auch deren Konvergenz beweisen:

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \ldots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{20}\right) + \ldots = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \frac{1}{280} + \ldots = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{60}\right) + \ldots = \frac{1}{3} \quad \text{usw.}$$

Allgemein gilt: $S_n = \frac{1}{n}$.

In seinen handschriftlichen Untersuchungen zu diesem Thema notierte Leibniz auch folgenden Sachverhalt (hier in moderner Schreibweise): $S_0 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{0}$ (!), d.h. durch einen formalen Analogieschluß kam Leibniz zu dem Ergebnis, daß diese spezielle „harmonische Reihe" divergiert, also keinen Grenzwert besitzt.

Pascalsches Dreieck und harmonisches Dreieck

In den Büchern des französischen Mathematikers **Blaise Pascal** fand Leibniz auch das nach jenem benannte Zahlendreieck (Abbildung Seite 14), das allerdings schon lange vor Pascal bekannt war. Jede Zahl (mit Ausnahme der Randzahlen 1) des Pascalschen Dreiecks ist die Summe der beiden schräg darüberstehenden Zahlen, so daß sich das Zahlenschema durch einfaches Addieren um beliebig viele Zeilen fortsetzen läßt.

Die Zahlen des Pascalschen Dreiecks, „Binomialkoeffizienten" genannt, werden heute üblicherweise mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet, wobei n die Zeile und k die Spalte angibt (die Zählung jeweils mit 0 beginnend). Sie haben nach Definition folgende Eigenschaften:

(P1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad n = 0,1,2,3,...$ (Randzahlen)

(P2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n = 1,2,3,...; \quad k = 1,2,...,n-1$ (Zeilenfortsetzung)

Aus ihnen ergeben sich weitere Eigenschaften, die sich z.T. mit vollständiger Induktion (ein Beweisverfahren, das auf Blaise Pascal zurückgeht) beweisen lassen:

(P3) $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (Berechnungsformel)

(P4) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie)

(P5) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$ (n-te Zeilensumme)

Bezeichnet man die Zahlen des harmonischen Dreiecks den Binomialkoeffizienten entsprechend mit $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, so lautet die Definition des harmonischen Dreiecks:

(H1) $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{n+1}, \quad n = 0,1,2,3,...$ (Randzahlen)

(H2) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}, \quad n = 1,2,3,...; \quad k = 1,2,...,n-1$ (Zeilenfortsetzung)

Zwischen den (ganzen) Zahlen des Pascalschen Dreiecks und den (Bruch-)Zahlen des harmonischen Dreiecks besteht nun ein erstaunlicher Zusammenhang, den man leicht erkennt (bitte selbst ausprobieren), wenn man zunächst einmal nur die Nenner des harmonischen Dreiecks als Zahlenschema notiert und anschließend jede Zeile durch die jeweilige Anfangszahl durchdividiert. Es ergibt sich genau das Pascalsche Dreieck!

In Formeln ausgedrückt: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{-1} = (n+1) \cdot \binom{n}{k}$ bzw. $\binom{n}{k} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{n+1}$.

Auch dieser Zusammenhang läßt sich mittels vollständiger Induktion unter Benutzung der aufgeführten Eigenschaften beweisen.

Nun ist es ein leichtes, den Eigenschaften (P3) bis (P5) entsprechende Eigenschaften (H3) bis (H5) des harmonischen Dreiecks festzustellen! (Nebenbei ergibt sich übrigens auch, daß alle Zahlen des harmonischen Dreiecks Stammbrüche sind, d.h. den Zähler 1 haben.)

Das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Im Zusammenhang mit dem „harmonischen Dreieck“ untersuchte Leibniz die unendliche Reihe

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots,$$

die heute allgemein als **„harmonische Reihe“** bekannt ist. Diesen Namen erhielt sie von Leibniz, und er war auch einer der ersten, der sie in seinen Manuskripten erörterte und feststellte, daß sie divergent ist, d.h. wenn man nur genügend viele Glieder dieser Reihe aufaddiert, so kann man jede beliebig große, vorgegebene Zahl übertreffen! Allerdings wächst die harmonische Reihe nur sehr langsam, und die Summe der ersten 250 Millionen Glieder ist immer noch kleiner als 20. Um die Zahl 100 zu überschreiten, benötigt man sogar mehr als $15 \cdot 10^{42}$ Reihenglieder (15 „Septillionen“)!

Was die divergente harmonische Reihe betrifft, so machte der Mathematiker **Leonhard Euler** 1740 eine bemerkenswerte Entdeckung:
Ist $s(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$ die n-te Teilsumme der harmonischen Reihe, und bildet man die Differenz $d(n) = s(n) - \ln(n)$ dieser Teilsumme mit dem natürlichen Logarithmus von n, so hat die Differenzenfolge $d(n)$ einen endlichen Grenzwert γ („Euler-Konstante“), ist also konvergent:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \ln(n) \right] = 0{,}5772156649\ldots$$

Die Untersuchung unendlicher Reihen hatte es Leibniz angetan, und so stellte er sich auch die Frage, ob unendliche „**alternierende Reihen**“ der Art $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - + \ldots$ konvergieren, deren Teilsummanden also ständig das Vorzeichen wechseln. Leibniz fand nicht nur wie schon erwähnt den Grenzwert $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots = \frac{\pi}{4}$, sondern formulierte einen allgemeinen Satz, der heute als „**Leibnizsches Konvergenzkriterium**“ in jedem mathematischen Fachbuch zu finden ist:
Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn die Beträge ihrer Glieder eine monotone Nullfolge bilden.

Einige Beispiele sollen diesen Satz erläutern:

1) Da die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge bildet, konvergiert die aus der harmonischen Reihe abgeleitete Reihe mit abwechselnden Vorzeichen:
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \ldots = 0{,}693147 \ldots = \ln 2$ (natürlicher Logarithmus von 2)

2) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + - \ldots = \frac{\pi^2}{12}$ für die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)$

3) $1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \frac{1}{729} - \frac{1}{1331} + - \ldots = \frac{\pi^3}{32}$ für die Folge $\left(\frac{1}{(2n-1)^3}\right)$

4) $\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + - \ldots = 0{,}841470\ldots = \sin 1$ für die Folge $\left(\frac{1}{(2n-1)!}\right)$

Leibniz, seine „Erfindungskunst“ und die mathematische Logik

In vielen seiner Gedanken, vor allem in logischer Hinsicht, war Leibniz seiner Zeit weit voraus. Er beschäftigte sich zum Teil mit Problemen, die erst im 19. und 20. Jahrhundert in ihrer tiefen Bedeutung erkannt wurden. So versuchte er, das Rechnen mit natürlichen Zahlen axiomatisch zu begründen, und bemühte sich um eine kritische Durchleuchtung der Axiome Euklids. Besonders hervorzuheben ist jedoch sein Vorschlag einer „universalen Begriffsschrift“, die allen Völkern verständlich sein sollte.

Leibniz schreibt selbst, er habe schon als Knabe die Vorstellung gehabt, „man könne eine Analysis der Begriffe erfinden, mit deren Hilfe durch Kombination die Wahrheiten ausgedrückt und gleichsam mittels Zahlen berechnet werden könnten“. Leibniz plante eine „Erfindungskunst“ (ars inveniendi) zu schreiben und meinte dazu: „Nichts ist wichtiger, als die Quellen des Erfindens zu sehen, die nach meiner Meinung interessanter sind als die Erfindungen selbst.“ Mit seiner darauf Bezug nehmenden „Dissertation über die Kunst des Kombinierens“ (dissertatio de arte combinatoria) hat der erst 20jährige Leibniz 1666 die Lehrbefugnis an der Leipziger Universität erhalten. Gestaltet werden sollte seine „Erfindungskunst“ mit Hilfe einer „universalen Begriffsschrift“ (characteristica universalis), denn im Felde der Logik seien Zeichen besser als Worte, weil diese oft emotional belastet seien. Die Regeln des Schließens sollte man in Rechenregeln umwandeln, damit bei ihrer Anwendung die inhaltliche Bedeutung überhaupt nicht bedacht zu werden brauche. Leibniz ging davon aus, daß unsere Bewußtseinsinhalte und Wahrnehmungen sich in eine Anzahl von einfachen und grundlegenden Elementarbegriffen zergliedern lassen (Alphabet der Gedanken), welche wiederum durch Zahlen (Symbole) ausgedrückt werden können. Mit Hilfe rein logisch-formaler Regeln lassen sich sodann aus ihnen alle wahren Sätze ableiten sowie alle weiteren möglichen Begriffe ausfindig machen und systematisieren (calculus ratiocinator). Leibniz verglich seine Elementarbegriffe, aus denen sich alle übrigen Begriffe des menschlichen Denkens zusammensetzen, mit den Primzahlen, aus denen sich alle echt teilbaren natürlichen Zahlen zusammensetzen.

Mit seiner Idee einer symbolischen Logik war Leibniz Planer und Wegbereiter der für die moderne Mathematik grundlegenden formalen Logik (auch Logistik oder Logikkalkül genannt), die im 19. und 20. Jahrhundert Männer wie Augustus de Morgan (1806-1878), George Boole (1815-1864), Ernst Schröder (1841-1902), Gottlob Frege (1848-1925), Alfred North Whitehead (1861-1947), Bertrand Russell (1872-1970) und Heinrich Scholz (1884-1956) aufgebaut und fortentwickelt haben.

In besonderem Maße sei in diesem Zusammenhang der englische Mathematiker **George Boole** (1815-1864) genannt, von dem Bertrand Russell behauptet, er habe in seinem Buch „The Laws of Thought“ (Die Gesetze des Denkens) die „reine Mathematik“ entdeckt. Boole, der ebenso wie Leibniz ein Autodidakt war und als junger Mann sein Brot als Elementarlehrer verdiente, las in seiner Freizeit Bücher großer Mathematiker wie Abel, Galois oder Laplace. Ähnlich wie Leibniz, aber wahrscheinlich ohne dessen diesbezügliche Schriften zu kennen, fand Boole heraus, daß die Symbolik der Algebra nicht nur für Aussagen zwischen Zahlen und Zahlvariablen brauchbar sei. Auch im Bereich der Logik kann man einen Kalkül (d.h. eine Art zu rechnen) einführen, der dem in der Zahlenalgebra verwandt ist. Mehr noch: Man kann die Gesetze mathematischer Kalküle entwickeln, ohne dabei an spezielle „Deutungen“ gebunden zu sein. Die Aussagen des Kalküls können dann später in unterschiedlichen Gebieten der Mathematik „gedeutet“ werden. So hat die „Boolesche Algebra“ heute ihre Bedeutung nicht nur im Bereich der formalen Logik, sondern auch in der Mengenalgebra, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der allgemeinen Verbandstheorie.

Weitere mathematische Aktivitäten von Leibniz

Für den umfassend interessierten Leibniz waren in mathematischer Hinsicht vor allem die vier Pariser Jahre von 1672 bis 1676 ausschlaggebend. Hier hatte er die entscheidenden Einfälle und Gedanken, die er in späteren Jahren ausgestaltete und veröffentlichte. Von **Huygens** auf die Schriften von **Cavalieri**, **Descartes**, **Wallis**, **Pascal** und anderen verwiesen, eignete er sich deren Inhalte in kürzester Zeit im Selbststudium an und war somit auf dem neuesten mathematischen Wissensstand.

Neben den übrigen in diesem MONOID-Sonderheft dargestellten Themen untersuchte Leibniz mit Erfolg auch noch folgende mathematische Probleme (wir zitieren vor allem Kropp):

— Die Kettenlinie (1691): Tangente, Quadratur, Rektifikation, Schwerpunkt, Kubatur und Komplanation des Drehkörpers, der durch Rotation der Kettenlinie um ihre Achse entsteht.

— Methode der unbestimmten Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung (1693): Leibniz weist darauf hin, daß es bei seiner Methode nicht nötig sei, Brüche oder Wurzeln in den Ausgangsfunktionen zu beseitigen, und daß die Funktionen auch in Differential- oder Integralform gegeben werden könnten - ein in die Zukunft weisender Gedanke. Als Beispiel gibt Leibniz 1686 die Gleichung der Zykloide an.

— Ermittlung des bestimmten Integrals, wenn man eine Stammfunktion kennt (1693).

— Problem der Enveloppe einer Kurvenschar (1692, 1694).

— Integration einiger gewöhnlicher Differentialgleichungen im Anschluß an geometrisch gestellte Probleme (1694).

— Bestimmung höherer Differentiale, insbesondere des n-ten Differentials einer Produktfunktion (1695, veröffentlicht erst 1710).

— Überführung einer Differentialgleichung in eine Integralgleichung (1702):

— Vollständige Durchführung der Integration rationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung (1702/03). (Newton war bei dem gleichen Problem nicht bis zum Logarithmus und Arcustangens vorgedrungen, konnte also gebrochene rationale Funktionen nicht allgemein integrieren.)

— Systeme linearer Gleichungen: Die Einführung der Bezeichnung durch Doppelindizes ermöglicht eine bequeme Lösung. Leibniz verwendet ein Verfahren, das dem später von **Gabriel Cramer** (1704-1752) ausgebauten Rechnen mit Determinanten entspricht.

— Im Anschluß an das Homogenitätsprinzip von **François Viète** (1540-1603) wird Leibniz zum polynomischen Lehrsatz geführt.

— Bildung des Begriffes einer Exponentialfunktion $y = a^x$ mit fester Grundzahl und veränderlichem Exponent (1679): Leibniz erkennt auch die Transzendenz der Exponentialfunktion und deutet einen Weg an, auf dem diese Transzendenz in aller Strenge bewiesen werden kann.

Nebenbei sei noch angemerkt, daß Leibniz zu den **Hauptgestaltern der heutigen mathematischen Formelschreibweise** gehört.

So verdanken wir ihm neben dem Integralzeichen $\int$ und dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ die Erfindung der Indizes, die Überstreichung von Buchstaben, die Determinantenschreibweise, den Multiplikationspunkt, die Schreibweise einer Proportion $a:b = c:d$ mit Doppelpunkt und Gleichheitszeichen, die Verwendung der Potenzschreibweise a^x auch für variable Exponenten u.v.m.

Auch Leibniz konnte sich irren

„Nobody is perfect" - Kein Mensch ist vollkommen. Dieses Wort trifft auch auf den Universalgelehrten Leibniz wie auch auf andere große Persönlichkeiten zu, was uns „Normalsterblichen" einen gewissen Trost geben mag.

So beschäftigte sich Leibniz beim Studium wahrscheinlichkeitstheoretischer Probleme mit folgender Aufgabe:
Mit welcher Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit treten beim Werfen zweier Würfel die verschiedenen Augensummen auf?

Leibniz überlegte, daß sich die Augensummen 11 ($= 5 + 6$) und 12 ($= 6 + 6$) auf jeweils nur eine Art, die Augensumme 7 ($= 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$) aber auf drei Arten in Summanden zerlegen lassen. Also folgerte er, daß die Augensummen 11 und 12 gleich häufig auftreten, die Augensumme 7 dagegen dreimal so oft. In Wahrheit muß man jedoch die beiden Würfel als unterscheidbar betrachten, so daß von den 36 möglichen Ausgängen (1;1), (1;2), (1;3), ..., (6;6) dieses Zufallsexperimentes **zwei** Ausgänge, nämlich (5;6) und (6;5) zur Augensumme 11 führen, aber nur **ein** Ausgang (6;6) zur Augensumme 12, während insgesamt **sechs** Ausgänge (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1) die Augensumme 7 ergeben. Also verhalten sich die Häufigkeiten bzw. die Wahrscheinlichkeiten zueinander wie 2 : 1 : 6.

Leibniz befaßte sich bekanntlich auch in besonderem Maße mit unendlichen Reihen und ihren möglichen Grenzwerten. Erst Mitte des 19. Jahrhunderts wurden die Gesetze von Grenzwerten mathematisch exakt formuliert, zuvor war man in dieser Beziehung eher unbekümmert umgegangen und hatte vor allem mit den Plus- und Minusgliedern in verschiedenen unendlichen Reihen sehr sorglos jongliert. Auf diese Weise waren auch alle möglichen Paradoxien entstanden, die man sich nicht erklären konnte.

So hatte der italienische Mathematiker **Guido Grandi** die einfache unendliche Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \ldots$ betrachtet und war zu dem Schluß gekommen, daß ihr Grenzwert $\frac{1}{2}$ sein müsse! Seine Begründung war folgende: Setzt man auf verschiedene Weise Klammern, so ist

(1) $1 - 1 + 1 - + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$

(2) $1 - 1 + 1 - + \ldots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1$

Also ist es sinnvoll, den mittleren Wert $\frac{1}{2}$ als Grenzwert anzunehmen. Grandi unterstrich diese Annahme durch eine Parabel von einem Vater, der seinen zwei Söhnen einen Edelstein vermacht und von ihnen verlangt, daß jedes Jahr ein anderer der beiden den Stein haben solle, d.h. ihr Anteil am Stein ist $1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$ Da die Brüder den Stein in gleichem Maße besitzen, hat jeder den Anteil $\frac{1}{2}$ an dem Edelstein.

Dieser Meinung Grandis, der richtige Grenzwert der Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$ sei $\frac{1}{2}$, schlossen sich sowohl Leibniz als auch der bedeutende Mathematiker Leonhard Euler an, allerdings mit unterschiedlichen Begründungen. Heute weiß man, daß diese Reihe divergent ist, so daß ihr kein sinnvoller Grenzwert zugeschrieben werden kann. Im Jahre 1854 bewies der deutsche Mathematiker **Bernhard Riemann** (1826-1866): Kann der Grenzwert einer unendlichen Reihe durch Umgruppierungen oder Umordnen der Glieder geändert werden („bedingt konvergente Reihe"), so kann man sogar **jeden** gewünschten Grenzwert erhalten!

Literaturliste zu den Aufsätzen über Leibniz

[1] Alpha 4/83, 5/83, 1/84, 10/95

[2] Barth/Haller: Stochastik Leistungskurs. München (Ehrenwirth) 1988.

[3] Courant, Richard: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd. 1. Berlin (Springer) 1969.

[4] Engel, Arthur: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. Stuttgart (Klett) 1977.

[5] Finster/v.d.Heuvel: Gottfried Wilhelm Leibniz. Reinbek bei Hamburg (Rowohlt) 1993.

[6] Fuchs, Walter R.: Knaurs Buch der modernen Mathematik. München (Knaur) 1966.

[7] Ganzhorn/Walter: Die geschichtliche Entwicklung der Datenverarbeitung. Stuttgart (IBM) 1975.

[8] Gardner, Martin: Mathematisches Labyrinth. Braunschweig (Vieweg) 1979.

[9] Honsberger, Ross: Mathematische Juwelen. Braunschweig (Vieweg) 1982.

[10] Kleine Enzyklopädie Mathematik. Leipzig (VEB BI) 1971.

[11] Kracke, Helmut: Mathe-musische Knobelisken. Bonn (Dümmler) 1982.

[12] Kropp, Gerhard: Geschichte der Mathematik. Heidelberg (Quelle & Meyer) 1969.

[13] Lambacher/Schweizer: Computer-Zusatzband Sekundarstufe 1. Stuttgart (Klett) 1990.

[14] v.Mangoldt/Knopp: Einführung in die höhere Mathematik. Bd. 1. Leipzig (Hirzel) 1970.

[15] mathe-plus 2/84, 3/86, 5-6/86

[16] Meschkowski, Herbert: Wandlungen des mathematischen Denkens. Braunschweig (Vieweg) 1960.

[17] Meschkowski, H.: Denkweisen großer Mathematiker. Braunschweig (Vieweg) 1961.

[18] Meschkowski, H.: Mathematiker-Lexikon. Mannheim (BI) 1964.

[19] Meschkowski, H.: Unendliche Reihen. Mannheim (BI) 1982.

[20] Meyers Handbuch über die Mathematik. Mannheim (BI) 1972.

[21] Ocker/Schöttle/Simon: Informatik. München (Oldenbourg) 1979.

[22] Wußing/Arnold (Hg.): Biographien bedeutender Mathematiker. Köln (Aulis) 1978.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Kupferstich von M. Bernigeroth 1703
nach einem Gemälde von A. Scheits